Profesor:
Fortunato Mendoza

ARITMÉTICA

GRUPO PITÁGORAS

TEORIA DE NÚMEROS

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Conjunto numérico de aplicación:

$Z^+ = \{1; 2; 3; 4; ....\}$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD)

El MCD de un conjunto de enteros positivos es aquel entero positivo que cumple dos condiciones :

✳ Ser divisor común del conjunto de enteros positivos.
✳ Ser el mayor posible.

Ejemplo: Sean los números 16 y 24

Divisores comunes de 16 y 24 :

1; 2; 4; 8

$\therefore$ **MCD(18; 24)** = 8

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

El MCM de un conjunto de enteros positivos es aquel entero positivo que cumple dos condiciones :

✳ Ser múltiplo común del conjunto de enteros positivos
✳ Ser el menor posible

Ejemplo : Sean los números 16 y 24

Múltiplos comunes de 16 y 24 :

48; 96; 144; 192; ....

$\therefore$ MCM(16; 24) = 48

PITAGORAS ACADEMIA

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

MÉTODOS PARA DETERMINAR EL MCD - MCM

1. Por Descomposición Simultánea

Ejemplo :

Calcular el MCD y MCM de los números : 96; 120 y 180

	96	120	180	2	
	48	60	90	2	MCD
	24	30	45	3	
PESI ➡	$\boxed{8 \quad 10 \quad 15}$			2	MCM
	4	5	15	2	
	2	5	15	2	
	1	5	15	3	
	1	5	5	5	
	1	1	1		

$$MCD(96; 120; 180) = 2^2 . 3 = 12$$

$$MCM(96; 120; 180) = 2^5 . \ 3^2 . 5 = 1\,440$$

2. Por Descomposición Canónica

Ejemplo : Dados los siguientes números :

$A = 2^4 . 3^2 . 5^3$

$B = 2^3 . 3^5 . 5 . 7^2$

$C = 2^5 . 3^6 . 5^2 .7^4$

$$MCD(A; B; C) = \underbrace{2^3 . 3^2 . 5^1}_{\text{comunes}} \leftarrow \text{menores exponentes}$$

$$MCM(A; B; C) = \underbrace{2^5 . 3^6 . 5^3 . 7^4}_{\text{todos}} \leftarrow \text{mayores exponentes}$$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Divisiones sucesivas o algoritmo de Euclides para el cálculo del MCD de dos enteros positivos

Ejemplo:

Calculemos el MCD(84; 60) efectuando las divisiones por defecto :

Cocientes →		1	2	2	
	84	60	24	12	← MCD
Residuos →		24	12	0	

$\therefore$ MCD(84; 60) = 12

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

PROPIEDADES

1. Si A y B son PESI ; se cumple:

$\boxed{MCD(A; B) = 1}$

$\boxed{MCM(A; B) = A . B}$

2. Dados dos números A y B : si $A = \dot{B}$

Se cumple:

$\boxed{MCD(A; B) = B}$

$\boxed{MCM(A; B) = A}$

3. MCD y MCM por asociación

✳ Si $MCD(A; B) = d_1$

$MCD(C; D) = d_2$

Se cumple:

$\boxed{MCD(A;B;C;D) = MCD(d_1; d_2)}$

✳ Si $MCM(A; B) = m_1$

$MCM(C; D) = m_2$

Se cumple:

$\boxed{MCM(A; B;C;D) = MCM(m_1; m_2)}$

4. Sea "a" ∈ Z mayor que 1, {α; β; θ) ∈ Z^+ tal que :

$A = a^{\alpha} - 1$

$B = a^{\beta} - 1$

$C = a^{\gamma} - 1$

Se cumple:

$\boxed{MCD(A;B;C)=a^{MCD(\alpha;\beta;\gamma)} - 1}$

Teorema

Para dos números A y B

Sea $MCD(A; B) = d$

$MCM(A; B) = m$

Se cumple:

1) $\boxed{A = d\,p}$ $\boxed{B = d\,q}$

Donde p y q son primos entre si

2) $\boxed{m = d\,p\,q}$

3) $\boxed{A.B = d\,m}$

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

PROBLEMAS

1. Halle el valor de “n” sabiendo que los números $A=8\times6^n$ y $B=6\times8^n$ tienen 18 divisores positivos en común.

A) 1 **B) 2** **C) 3**

D) 4 **E) 5**

Resolución

$A = 8 \,.\, 6^n \longrightarrow A = 2^3 \,.\, 2^n .\, 3^n \longrightarrow A = 2^{n+3} \,.\, 3^n$

$B = 6 \,.\, 8^n \longrightarrow B = 2 \,.\, 3 \,.\, 2^{3n} \longrightarrow B = 2^{3n+1} .\, 3^1$

$\text{MCD}(A;B) = 2^{n+3} .\, 3^1 \longrightarrow$ 18 div

$(n+4)\, 2 = 18 \longrightarrow n+4 = 9$

$\therefore \quad n = 5$

Clave: E

PROBLEMAS

2. En la determinación del MCD de dos números por el Algoritmo de Euclides se han obtenido los siguientes cocientes 1; 2; 2 y 2 respectivamente. Si el MCD de todos los residuos obtenidos es 31, determine el mayor de estos dos números.

A) 527 B) 635 C) 840 D) 485 E) 736

Resolución

Sean los números: A y B (A > B)

	1	2	2	2	
A	**B**	5k	2k	k →	MCD
	5k	2k	k	0	

Observación: $B = 5k\,(2) + 2k \rightarrow B = 12k$

$A = 12k\,(1) + 5k \rightarrow A = 17k$

Dato: $MCD(5k;\,2k;\,k) = 31 \rightarrow k = 31$

Piden: $A = 17\,(31) = 527$ **Clave: A**

PROBLEMAS

3. Al calcular el MCD de dos números mediante divisiones sucesivas, se obtiene como cocientes 2; 4; 2 y 3; además la suma de dichos números posee 24 divisores. Calcule la diferencia de dichos números si su MCD es un capicúa impar menor que 200.

A) 2 145 **B) 2 035** **C) 2 090**

D) 1 254 **E) 2 926**

Resolución

Sean los números: A y B (A > B)

	2	4	2	3	
A	**B**	7k	3k	k	$\longrightarrow$ MCD
	7k	3k	k	0	

Observación: B = 31k

A = 69k

Datos: K es capicúa impar

K < 200

A + B = 100k $\longrightarrow$ 24 div

$A + B = 2^2 \,.\, 5^2 \,.\, k \longrightarrow$ 24 div = 3 . 4 . 2

Obs: $A + B = 2^2 \,.\, 5^3 \,.\, p^1 \longrightarrow$ 24 div

Primo $\neq 2; 5$

Entonces k = 5 . p < 200

Obs: p = 11 $\longrightarrow$ k = 55

Piden: A – B = 38k = 38(55)

A – B = 2090

Clave: C

PROBLEMAS

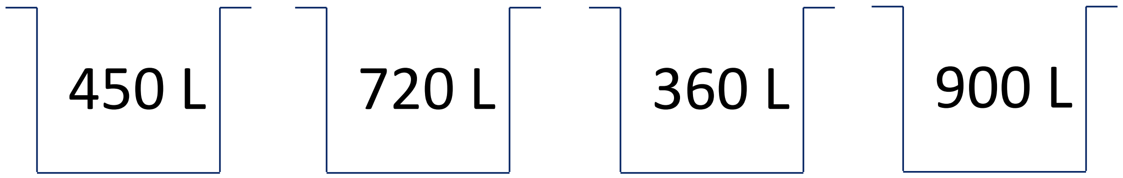
4. Se tiene 4 barriles con 450, 720, 360 y 900 litros de vino y se quiere vaciar dichos contenidos en envases de igual capacidad, la mayor posible y que esté contenido en forma exacta en el contenido de cada barril. ¿Cuál es el número de envases?

A) 27 **B) 9** **C) 30**

D) 22 **E) 32**

Resolución

Se tiene



Sea V la capacidad de cada envase

Por dato:

V es máximo

V es divisor común de 450; 420; 360; 900

Se cumple: V = MCD(450; 720; 360; 900)

V = 90 L

Piden:

$$\#\text{ envases} = \frac{450}{90} + \frac{720}{90} + \frac{360}{90} + \frac{900}{90}$$

$$\#\text{ envases} = 5 + 8 + 4 + 10 = 27$$

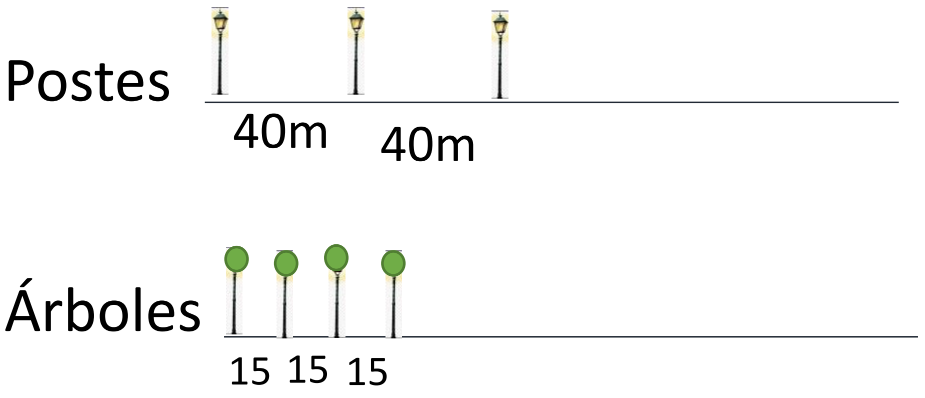
Clave: A

5. En una avenida se plantan postes electrónicos en la acera cada 40 metro y arboles cada 15 metros por el centro de la pista. ¿Cuántas veces coincide un árbol y un poste si se empezó plantando un árbol y un poste y además la avenida es de 6 km?

A) 49 **B) 50** **C) 51**

D) 60 **E) 61**

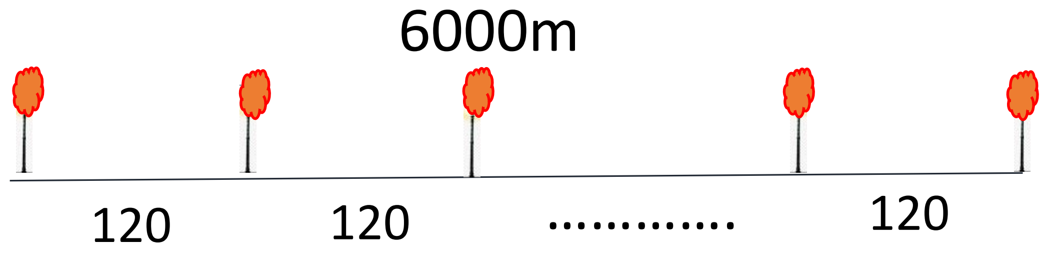
Resolución



MCM(40; 15) = 120

Los árboles y postes coinciden cada 120 m

Gráfico de coincidencias:



$$\# \text{ coincidencias } = \frac{6000}{120} + 1 = 51$$

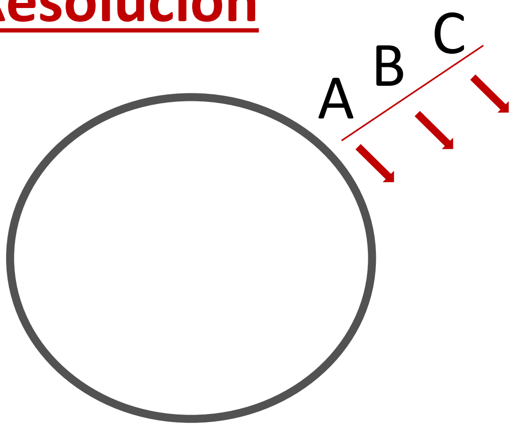
Clave: C

6. **Tres móviles A, B y C parten al mismo tiempo de un punto de partida de una pista circular que tiene 240 m de circunferencia. A se desplaza con velocidad de 8m/s; B con velocidad de 5m/s y C con velocidad de 3 m/s. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que los 3 móviles realicen el primer encuentro?**

A) 4 min. **B) 6 min.** **C) 8 min.**

D) 12 min. **E) 15 min**

Resolución



Longitud de la pista circular: 240 m

$V_A = 8\,{}^{m}/_{s}$; $V_B = 5\,{}^{m}/_{s}$; $V_C = 3\,{}^{m}/_{s}$

En dar 1 vuelta

$$t_A = \frac{240}{8} = 30\text{ s}$$

$$t_B = \frac{240}{5} = 48\text{ s}$$

$$t_C = \frac{240}{3} = 80\text{ s}$$

MCM(30; 48; 80) = 240

Los tres móviles realizarán el primer encuentro después de 240 seg <> 4 min

Clave: A

7. Sabiendo que:

M.C.D. [A! ; (A+1)!] = $2^B x\ 3^C x\ 5^D$

A + B + C + D = 13

Hallar: M.C.M.(A; B; C; D)

A) 12 **B) 13** **C) 14**

D) 15 **E) 16**

Resolución

M.C.D. [A! ; (A+1)!] = $2^B x\ 3^C x\ 5^D$ .....(1)

A + B + C + D = 13

De (1) A! = $2^B . 3^C . 5^D$

Observación: $5 \leq A < 7$

Si A = 5 ⟶ 5! = 120 = $2^3 . 3^1 . 5^1$ ⟶ A + B + C + D = 10 (No es solución)

Si A = 6 ⟶ 6! = 720 = $2^4 . 3^2 . 5^1$ ⟶ A + B + C + D = 13 (Si es solución)

Piden: MCM(A; B; C; D) = MCM(6; 4; 2; 1) = 12

Clave: A

8. Si el MCD (31!, 32!) tiene n divisores, ¿Cuántos divisores tiene el MCM de los mismos?

A) (30/26)n **B) (31/27)n** **C) (32/27)n**

D) (32/25)n **E) (31/27)(n + 1)**

Resolución

M.C.D [31! ; 32!] =31! ⟶ n div

M.C.M [31! ; 32!] =32! ⟶ ??

Como 32! = 31! x 32 = 31! . 2^5 ……(1)

Expresaremos 31! = 2^{α} . k

$$\begin{array}{l|l} 31 & 2 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{l|l} 15 & 2 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{l|l} 7 & 2 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{l|l} 3 & 2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Luego:

31! = 2^{26} . k ⟶ n div

$$27CD_{(k)} = n$$

$$CD_{(k)} = \frac{n}{27}$$

En (1): 32! = $(2^{26} . k)2^5$

32! = 2^{31} . k ⟶ $CD_{(32!)} = 32\ CD_{(k)}$

$$CD_{(32!)} = 32 . \frac{n}{27}$$

Clave: C

PROBLEMAS

9. Si: **MCD(2A ; 4B) = 24N**

MCD(5C ; B) = 15N

MCD(A; 2B ; 10C) = 144

Calcule la suma de los divisores de N:

A) 24 **B) 32** **C) 33**

D) 60 **E) 93**

Resolución

MCD(2A ; 4B) = 24N ⟶ MCD(A ; 2B) = 12N

MCD(5C ; B) = 15N ⟶ MCD(10C ; 2B) = 30N

MCD(A; 2B ; 10C) = 144 ⟶ MCD(12N ; 30N)= 144

Luego: 6N = 144 ⟶ $N = 24 = 2^3 . 3^1$

Piden: $$SD_{(N)} = \left(\frac{2^4 - 1}{2 - 1}\right)\left(\frac{3^2 - 1}{3 - 1}\right) = 15 . 4 = 60$$

Clave: D

PROBLEMAS

10. La suma del M.C.D. y el M.C. M. de dos números es 92 y el cociente del M.C.M. entre el M.C.D. es 45. Hallar la suma de los números

A) 32 **B) 14** **C) 82**

D) 28 **E) 15**

Resolución

Sean los números A y B

MCD(A ; B) = d ; MCD(A ; B) = m $\rightarrow$ $\begin{cases} A = dp \\ B = dq \\ m = dpq \end{cases}$

Datos: d + m = 92

$$\frac{m}{d} = 45$$

Resolviendo: d = 2 ; m = 90 $\rightarrow$ dpq = 90

2pq = 90 $\rightarrow$ pq = 3^2. 5

Como p y q son PESI $\rightarrow$ p = 9 ; q = 5

Luego A = dp = 2(9) = 18

B = dq = 2(5) = 10

Piden: A + B = 28

Clave: D

11. Sea A y B dos números enteros cuyo M.C.D. es 12 y la diferencia de sus cuadrados es 20880. Hallar: A – B.

A) 56 **B) 40** **C) 62**

D) 45 **E) 60**

Resolución

MCD(A ; B) = 12 ⟶ $\left\{ \begin{array}{l} A = 12p \\ B = 12q \end{array} \right.$; p y q son PESI

$A^2 - B^2 = 20880 \longrightarrow 144p^2 - 144q^2 = 20880$

$p^2 - q^2 = 145 \longrightarrow$ (p + q)(p – q) = 29 . 5

$\left. \begin{array}{l} p + q = 29 \\ p - q = 5 \end{array} \right\}$ p = 17 ⟶ A = 12(17) = 204

q = 12 ⟶ B = 12(12) = 144

Piden: A - B = 60 **Clave: E**

12. Calcular la suma de las cifras de la suma de A y B; si: $A^2 + B^2 = 10530$ y el M.C.M. (A; B) = 297

A) 11 **B) 13** **C) 9**

D) 10 **E) 15**

<u>**Resolución**</u>

Sean los #s A y B → A = dp ; B = dq ; p y q son PESI
m = dpq

$A^2 + B^2 = 10530 \rightarrow d^2\,(p^2 + q^2) = 2.3^4\,.5\,.13$

m = 297 → dpq = $3^3\,.11$

Observación: d = 3^2 → $p^2 + q^2 = 130$; $p\,.\,q = 3\,.\,11$ → p = 11 ; q = 3

Luego A = 9(11) = 99 ; B = 9(3) = 27 → A + B = 126

Piden $\sum cifras = 9$

Clave: C

13. La suma de dos números enteros es 651, el cociente entre sus M.C.M. y M.C.D. es 108, luego la diferencia es:

A) 110 **B) 483** **C) 77**

D) 436 **E) 128**

Resolución

Sean los #s A y B ⟶ A = dp ; B = dq ; p y q son PESI
m = dpq

$A + B = 651$ ⟶ $d(p+q) = 3\,.\,7\,.\,31$

$\frac{m}{d} = 108$ ⟶ pq = $2^2\,.\,3^3$

Observación: p = 27 ; q = 4 ⟶ d = 21

Luego A = 21(27) = 567

B = 21(4) = 84

Piden A - B = 483 **Clave: B**

PROBLEMAS

14. Calcular el M.C.D. de $(11^a - 1)$ y $(11^b - 1)$. Sabiendo que: 330.M.C.D. (a, b) = a . b

a + b = 14M.C. D. (a ; b)

A) $11^6 - 1$ B) $11^{22} - 1$ C) $11^{15} - 1$ D) $11^{10} - 1$ E) $11^{11} - 1$

Resolución

Para los números a y b

Sea MCD(a; b) = d ⟶ $\begin{cases} a = dp \\ b = dq \end{cases}$; p y q son PESI

Datos

$300 \, . \, d = a \, . \, b$ ⟶ $330d = (dp)(dq)$ ⟶ dpq = 2 . 3 . 5 . 11

$a + b = 14d$ ⟶ dp + dq = 14d ⟶ $p + q = 14$

Observación: p = 11 ; q = 3 ⟶ d = 10

Luego a = 10(11) = 110

b = 10(3) = 30

Piden: MCD$[(11^{110} - 1) ; (11^{30} - 1)] = 11^{10} - 1$ **Clave: D**

PROBLEMAS

15. El producto de dos números enteros positivos es 360. La suma de los cocientes obtenidos al dividir cada uno de ellos por su Máximo Común Divisor es 7, y el producto de estos cocientes es 10.

Entonces, el valor absoluto de la diferencia de estos números es:

A) 2 **B) 31** **C) 18**

D) 84 **E) 54**

Resolución

Sean los #s A y B $\longrightarrow$ $\begin{cases} A = dp \;; \quad B = dq \\ p \text{ y } q \text{ son PESI} \end{cases}$

AB = 360 ....(1)

$\left.\begin{array}{l} p + q = 7 \\ pq = 10 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} p = 5 \longrightarrow A = 5d \\ q = 2 \longrightarrow B = 2d \end{array}$

En (1): (5d)(2d) = 360 $\longrightarrow$ d = 6

Piden: |A – B| = |3d| = |18| = 18

Clave: C

16. Hallar todos los pares de números enteros inferiores a 200 tales que su producto sea 32928 y su M.C.D. es 28. Dar como respuesta el número de soluciones.

A) 6 **B) 4** **C) 3**

D) 2 **E) 1**

Resolución

Sean los #s A y B

$\text{MCD}(A; B) = 28 \rightarrow \begin{cases} A = 28p \\ B = 28q \end{cases}$; p y q son PESI

$A ; B < 200 \rightarrow 28p < 200 \rightarrow p < 7,1$

$28q < 200 \rightarrow q < 7,1$

$A . B = 32928 \rightarrow (28p)(28q) = 32928$

$p.q = 42 \rightarrow p.q = 2 . 3 . 7$

Luego p = 6 ; q = 7 → 1 solución **Clave: E**

PROBLEMAS

17. Se tiene un número igual al M.C.M. de 15 números distintos. Determinar la suma de los divisores propios del menor número que cumple con dicha condición.

A) 248 **B) 259** **C) 241**

D) 341 **E) 471**

Resolución

Sean N el número

N es mínimo

N = MCM $(A_1;\ A_2; \ldots ;\ A_{15})$

Se cumple

$CD_{(N)} = 15$ = 5 . 3

Luego N = $2^4 . 3^2$ ⟶ 15 div

Piden: $\underset{Propios}{SD_{(N)}} = SD_{(N)} - \text{N}$

$$\underset{Propios}{SD_{(N)}} = \left(\frac{2^5-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^3-1}{3-1}\right) - 144 = 31 . 13 - 144$$

$$\underset{Propios}{SD_{(N)}} = 259$$

Clave: B

PROBLEMAS

18 . El número A tiene 21 divisores y el número B tiene 10 divisores, si el MCD(A, B) es 18, calcule A+B

A) 842 **B) 964** **C) 738**

D) 642 **E) 784**

Resolución

$$CD_{(A)} = 21$$

$$CD_{(B)} = 10$$

MCD(A; B) = 18 $\longrightarrow$ $\begin{cases} A = 18p = 2 \cdot 3^2 \cdot p & \longrightarrow 21 \text{ div} \\ B = 18q = 2 \cdot 3^2 \cdot q & \longrightarrow 10 \text{ div} \end{cases}$

$A = 2^6 \cdot 3^2 \longrightarrow p = 2^5 = 32 \longrightarrow A = 18(32) = 576$

$B = 2 \cdot 3^4 \longrightarrow q = 3^2 = 9 \longrightarrow B = 18(9) = 162$

Piden: A + B = 738

Clave: C

19. Si los números $\overline{abcd}$ y $\overline{pqrs}$ tienen 21 y 33 divisores respectivamente. Calcular el M.C.M. de ambos números sabiendo que el M.C.M. y el M.C.D. tienen 77 y 9 divisores respectivamente

A) 24^3 **B) 18^{12}** **C) 16×6^6**

D) 42^6 **E) 8×12^3**

Resolución

Sea $A = \overline{abcd}$; B = $\overline{pqrs}$

$CD_{(A)} = 21 = 7 \times 3$

$CD_{(B)} = 33 = 11 \times 3$

$CD_{[MCM(A;B)]} = 77 = 11 \times 7$

$CD_{[MCD(A;B)]} = 9 = 3 \times 3$

A = $p^6 . q^2$

B = $p^2 . q^{10}$

MCD(A; B) = $p^2 . q^2$

MCM(A; B) = $p^6 . q^{10}$

Observación: p = 3 ; q = 2 ⟶ A = $3^6 . 2^2 = 2916$

B = $3^2 . 2^{10} = 9216$

Piden: MCM(A; B) = $3^6 . 2^{10} = 16 . 6^6$

Clave: C

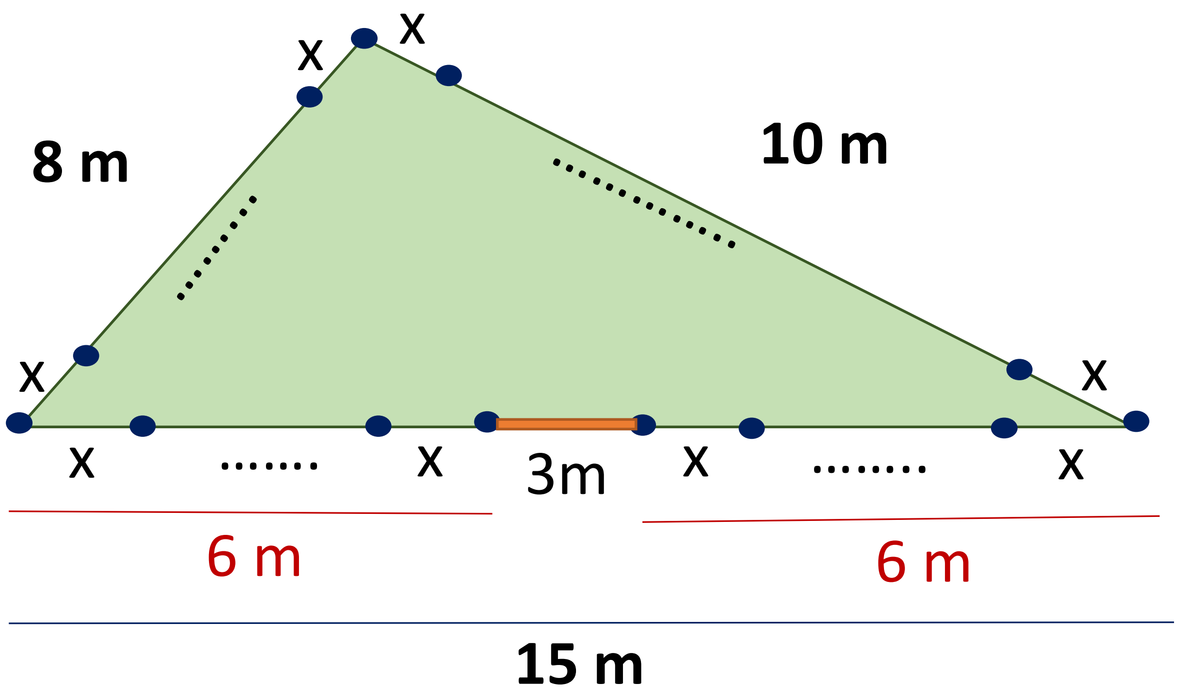
PROBLEMAS

20. Se quiere cercar un terreno triangular cuyos lados miden 8 m, 10 m y 15 m, con estacas cada x m, ¿Cuántas estacas se deben ubicar, si se debe dejar una puerta en el centro del lado mayor de 3 metros, de ancho, deben existir estacas en los vértices y en los extremos de la puerta?. Hallar el menor número de estacas que se deben utilizar.

A) 16 **B) 18** **C) 20**

D) 22 **E) 24**

Resolución



Se cumple:

x es divisor común de 8 ; 10 y 6

x es máximo

Luego:

x = MCD(8; 10; 6) $\longrightarrow$ x = 2

Piden: $\#estacas = \frac{6+8+10+6}{2} + 1$

#estacas = 16

Clave: A

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS